3 Konvergenz

29. *Konvergenz in einfachen Fällen.*
Wie sehen konvergente Netze in topologischen Räumen mit
   (i) der Klumpentopologie und
   (ii) der diskreten Topologie

   aus?

30. *Abschluss via Netze (vgl. Vo. Satz 3.10).*
Beweise Satz 3.10(ii) aus der Vorlesung, d.h. zeige dass

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \exists \text{ Netz } (x_\lambda)_\lambda \text{ in } A : x_\lambda \to x\}.$$

31. *Topologie der punktweisen Konvergenz.*
Ziel der folgenden (langen) Aufgabe ist es zu zeigen, dass die punktweise Konvergenz von Funktionen nicht durch eine Metrik beschrieben werden kann. Genauer: die Topologie der punktweisen Konvergenz von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist nicht durch eine Metrik induziert (vgl. Vo. 2.4(i)).

   Wir betrachten den (reellen) Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, also

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

   und definieren darauf eine Topologie $\mathcal{O}$ mittels Vorgabe einer Subbasis (vgl. Vo. Satz 2.13.) $S_{t,a,b}$, wobei für $t, a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$

$$S_{t,a,b} := \{f \in \mathcal{F} \mid a < f(t) < b\}.$$

   (i) Zeige, dass der Name ,,Topologie der punktweisen Konverenz" gerechtfertigt ist, d.h. zeige, dass eine *Folge* von Funktionen $(f_n)_n$ genau dann punktweise konvergiert, wenn sie in $(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ konvergiert.
   (ii) Zeige dass die konstante Funktion $f(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ im Abschluß $\bar{A}$ der Menge

$$A := \{f \in \mathcal{F} \mid f(x) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } x\}$$

   liegt.
   (iii) Zeige, dass es keine Folge $(f_n)_n$ in A gibt, die gegen f konvergiert. (*Hinweis:* Sei C_n die (endliche!) Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $f_n(x) \neq 0$ gilt und betrachte die Umgebung $S_{t,1/2,3/2}$ von f für ein t mit $t \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.)
   (iv) Zeige, $(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ ist nicht AA1 und daher auch nicht metrisierbar. (*Hinweis:* verwende die Charakterisierung des Abschlusses in metrischen Räumen analog zu Vo. Satz 3.10(ii).)
   (v) Als Draufgabe konstruiere ein Netz in A, dass gegen f konvergiert. (Ein solches muss es ja wegen Vo. Satz 3.10(ii) geben! *Hinweis:* Betrachte die gerichtete Menge $\Lambda = \{M \subseteq \mathbb{R} \mid M \text{ endlich}\}$ mit $\subseteq$ und das Netz f_M, die charakteristische Funktion von $M \in \Lambda$.)

32. *Charakterisierung von T_1-Räumen (vgl. Vo. Bem. 3.22(ii)).*
Beweise Bemerkung 3.22(ii) aus der Vorlesung, also, dass ein topologischer Raum genau dann das Trennungsaxiom T_1 erfüllt, falls alle einpunktigen Mengen $\{x\}$ (oft auch Singletons genannt) abgeschlossen sind.

33. *Trennungseigenschaften der kofiniten Topologie.*
Sie X eine unendliche Menge. Zeige, dass die kofinite Topologie (vgl. Vo. 2.4(v) bzw. Aufgabe 10(ii))

$$\mathcal{O}_{\text{CO}} := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

   die Trennungseigenschaft T_1 besitzt, aber kein Hausdorff Raum ist und liefere so die Details zu Vo. 3.23(ii) nach.

34. *Charakterisierung von T_4-Räumen (vgl. Vo. Bem. 3.22(iv)).*
Beweise Bemerkung 3.22(iv) aus der Vorlesung, also, dass ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ genau dann das Trennungsaxiom T_4 erfüllt, falls

$$\forall\, U \in \mathcal{O}\ \forall A \text{ abgeschlossen mit } A \subseteq U\ \exists V \in \mathcal{O} : A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subset U$$

gilt, also zwischen jede abgeschlossene Menge in einer offenen eine weitere offene Menge passt, sodass sogar ihr Abschluss noch in der ersten offenen Menge liegt (Skizze!).

4 Stetigkeit

35. *Stetigkeit in einfachen Fällen.*
Zeige, dass $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ auf jeden Fall stetig ist, falls $\mathcal{O}_X = 2^X$ oder $\mathcal{O}_Y$ die Klumpentopologie ist.

36. *Stetige Abbildungen nach $\mathbb{R}$.*
Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$ stetig. Zeige, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die Mengen $U = \{x \in X :\ f(x) > a\}$, $V = \{x \in X :\ f(x) < b\}$ und $W = \{x \in X :\ a < f(x) < b\}$ offen und die Mengen $A = \{x \in X :\ f(x) \geq a\}$, $B = \{x \in X :\ f(x) \leq b\}$, $C = \{x \in X :\ a \leq f(x) \leq b\}$, und $D = \{x \in X :\ f(x) = a\}$ abgeschlossen sind.

37. *Umformulierungen für Stetigkeit (vgl. Vo. Satz 4.4).*
Beweise Satz 4.4 aus der Vorlesung, d.h. zeige dass eine Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ genau dann stetig ist, wenn eine der folgenden (daher äquivalenten) Bedingungen gilt.
   (i) $\forall x \in X :\ U \in \mathcal{U}_{f(x)} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_x$
   (d.h. Urbilder von Umgebungen sind Umgebungen)
   (ii) $\forall A \subseteq Y$ abgeschlossen ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X
   (d.h. Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen)

38. *Stetige Abbildungen in einen Hausdorff-Raum.*
Seien f, g stetige Abbildungen von einem topologischen Raum X in einen Hausdorff-Raum Y. Zeige, dass die Menge $\{x \in X :\ f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen ist. Weiters zeige, dass falls f und g auf einer dichten Teilmenge von X übereinstimmen, dann gilt schon $f = g$.

39. *Lemma von Urysohn (vgl. Vo. Satz 4.14, 4.16).*
Verwandle die Beweisskizze 4.16 für das Lemma von Urysohn in einen wasserdichten Beweis. (*Hinweis:* [J], VIII,§2).

40. *Metrische Räume sind normal.*
Liefere die Details des ersten Beispiels in Vo. 3.22(vi) nach. Genauer, zeige, dass jeder metrische Raum (X, d) die Trennungseigenschaft T_4 besitzt. (Als T_2-Raum (Vo. 3.20(i)) erfüllt X auch T_1 (Vo. 3.22(i)) und ist somit per definitionem normal, falls er T_4 erfüllt.)
Hinweis: Verwende Vo. 4.15 und betrachte für die abgeschlossenen disjunkten Teilmengen A und B von X die Funktion

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(X, B)}.$$

Dabei ist $d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid\ a \in A\}$ der Abstand von x zur Menge A.